# ALGEMENE INLEIDING WISKUNDE

P.W.H. Lemmens

Mathematisch Instituut
der Rijksuniversiteit
Budapestlaan 6
Utrecht

INHOUD


| | | |
|---|---|---|
| Hoofdstuk 1. | Verzamelingen | pag. 1 |
| Hoofdstuk 2. | Logica | pag. 9 |
| Hoofdstuk 3. | Afbeeldingen | pag. 15 |
| Hoofdstuk 4. | Relaties | pag. 25 |
| Hoofdstuk 5. | Natuurlijke getallen, Volledige inductie en Aantal | pag. 30 |
| 6. Aanhangsel: | Het Griekse Alfabet | pag. 35 |
| | Opgaven bij Algemene Inleiding Wiskunde | pag. 36 |

# 1. VERZAMELINGEN

(1.1) Soms, bijvoorbeeld om schrijfwerk te beperken, is het verstandig om een aantal objecten tegelijk te beschouwen. In zo'n geval spreken we van een verzameling van objecten. De objecten heten elementen van de verzameling. Hier geven we een verzameling aan met een hoofdletter, terwijl de elementen van die verzameling aangegeven worden met kleine letters. De betrekking "a is element van de verzameling A" noteren we verkort als

$$a \in A$$

Willen we daarentegen aangeven dat een object x niet tot de verzameling A behoort, dan zetten we eenvoudig een streep door het symbool. Dus

$$x \notin A$$

betekent: x is niet element van A.
In veel gevallen kunnen we een verzameling beschrijven door alle elementen ervan expliciet op te sommen. Zo geven we met

$$X = \{a,b,c,d\}$$

aan dat

$a \in X$, $b \in X$, $c \in X$, $d \in X$ en dat X geen andere elementen heeft.

(1.2) Twee verzamelingen zijn gelijk als ze dezelfde elementen hebben. Dus $A = B$ betekent dat voor iedere x geldt

$x \in A$ dan en slechts dan als $x \in B$.

Dus

$$\{a,b,c,d\} = \{c,b,d,a\} .$$

(1.3) Een verzameling A heet <u>deelverzameling</u> van de verzameling B, als ieder element van A ook in B zit. We noteren dit als

$A \subset B$

Vaak komt men ook de notatie $A \subseteq B$ tegen, met dezelfde betekenis. Er doet zich hier echter een kleine moeilijkheid voor. Iemand die gewend is de notatie $A \subseteq B$ te gebruiken, bedoelt met $A \subset B$ dat $A \subseteq B$ is, maar $A \neq B$. In de praktijk levert het onderscheid tussen beide notaties slechts zelden moeilijkheden op. In dit dictaat betekent $A \subset B$ dus dat voor iedere x geldt: Als $x \in A$ dan $x \in B$. Als we hier willen aangeven dat A een deelverzameling van B is, maar $A \neq B$, dan schrijven we $A \underset{\neq}{\subset} B$.

De volgende belangrijke eigenschappen van het inclusieteken zijn gemakkelijk te verifiëren:

1. $A \subset A$ voor iedere verzameling A
2. Als $A \subset B$ en $B \subset C$, dan is $A \subset C$
3. Als $A \subset B$ en $B \subset A$, dan is $A = B$

<u>Voorbeeld</u>. De verzameling van de eerste n natuurlijke getallen geven we aan met $\underline{n}$. Dus $\underline{n} = \{1,2,\ldots\ldots,n\}$. Dan geldt bijvoorbeeld: $\underline{3} \subset \underline{5}$, $3 \in \underline{5}$, $\{3\} \subset \underline{5}$, $\{2,3\} \subset \underline{3}$, $5 \notin \underline{3}$, $\underline{5} \not\subset \underline{3}$.

<u>Voorbeeld</u>. Bekijk de verzameling $A = \{\underline{1},\underline{2},\underline{3}\}$. Elementen van A zijn zelf dus weer verzamelingen. Er geldt: $\underline{2} \in A$, $2 \in \underline{2}$, maar $2 \notin A$, $\{\underline{2},\underline{3}\} \subset A$, maar $\{2,3\} \not\subset A$.

(1.4) Een deelverzameling kunnen we geven door een kenmerkende eigenschap van zijn elementen. Laat P(x) een uitspraak zijn over de elementen x van X, dan geven we door

$\{x \in X \mid P(x)\}$

de verzameling aan, gevormd door dié elementen x van X waarvoor de uitspraak P(x) waar is. Andere gebruikelijke notaties hiervoor zijn $\{x \in X : P(x)\}$ of $\{x | P(x)\}$ als X van tevoren is vastgelegd. Wegens de definitie geldt altijd

$$\{x \in X \mid P(x)\} \subset X$$

<u>Voorbeeld</u>. Zij X = <u>6</u> en P(x) = "x is een deler van 8". Dan is $\{x \in X \mid P(x)\} = \{1,2,4\}$. We zien hier dat verschillende uitspraken best aanleiding kunnen geven tot dezelfde deelverzameling. Immers, als Q(x) = "x is deler van 4", dan is

$$\{x \in X \mid P(x)\} = \{x \in X \mid Q(x)\}.$$

<u>Voorbeeld</u>. We werken in de reële getallen. Zij P(x) de uitspraak "$0 \leqslant x \leqslant 1$". De verzameling van de punten van het segment [0,1] kunnen we dan aangeven door $\{x \mid P(x)\}$, of $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. De notatie $\{x \in X \mid P(x)\}$ noopt ons tot het invoeren van een lege verzameling, want het zou best kunnen gebeuren dat voor iedere $x \in X$ de uitspraak P(x) niet waar is. Bijvoorbeeld X = <u>6</u> en P(x) zegt: $x \geqslant 10$.

(1.5) De <u>lege verzameling</u> noteren we met $\phi$. $X = \phi$ betekent dat X geen elementen heeft, dus voor iedere x geldt $x \notin X$.
Op logische gronden besluiten we

1) Er is maar één lege verzameling
2) $\phi \subset X$ voor iedere verzameling X
3) Als $A \subset \phi$, dan $A = \phi$.

De deelverzamelingen $\phi$ en X van X noemen we <u>triviale deelverzamelingen</u>. Een deelverzameling A van X heet een <u>echte</u> deelverzameling als $A \subset X$ en $A \neq X$.

(1.6) De verzameling met als elementen alle deelverzamelingen van X (inclusief $\phi$ en X zelf) heet de machtsverzameling P(X) van X.

<u>Voorbeeld.</u> X = $\underline{3}$. Dan bestaat P(X) uit de volgende "elementen":
$\phi$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ en $\underline{3}$.

P($\underline{n}$) heeft $2^n$ elementen

(1.7) Bij twee verzamelingen A en B kunnen we hun <u>doorsnede</u> $A \cap B$ vormen, bestaande uit alle elementen die zowel in A als in B zitten. Dus

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ én } x \in B\}=\{x \in A \mid x \in B\}=\{x \in B \mid X \in A\}.$$

Blijkbaar geldt: $A \cap B = B \cap A$ (de doorsnedevorming is commutatief). Verder is het duidelijk dat $A \cap B \subset A$ en $A \cap B \subset B$. Als A en B geen gemeenschappelijke elementen bezitten, dan is $A \cap B = \phi$.
Voorts verifiëert men gemakkelijk de volgende regels:

$A \subset B$ dan en slechts dan als $A \cap B = A$

$A \cap A = A$

$A \cap \phi = \phi$. $\quad$ $C \subset A$ én $C \subset B$, dan $C \subset A \cap B$

(1.8) Ook kan men bij twee verzamelingen A en B kijken naar hun <u>vereniging</u>, $A \cup B$, bestaande uit alle elementen die in tenminste een van beide verzamelingen zitten.
Dus

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$$

Met "$x \in A$ of $x \in B$" bedoelen we hier: x in A of x in B of eventueel x in A én in B, dus "of" wordt hier gebruikt in de niet uitsluitende zin.

Weer gaat men gemakkelijk na dat het verenigingsteken voldoet aan de volgende eigenschappen:

$A \cup B = B \cup A$

$A \subset A \cup B$ en $B \subset A \cup B$

$A \subset B$ dan en slechts dan als $A \cup B = B$

$A \cup A = A$

$A \cup \phi = A$

$A \subset C$ én $B \subset C$, dan $A \cup B \subset C$

We zien dat deze eigenschappen analoog zijn aan die van de doorsnede "$\cap$", mits we de inclusies "$\subset$" omdraaien.

(1.9) Bij drie (of meer) verzamelingen A,B,C kan men de bewerkingen $\cup$ en $\cap$ door elkaar uitvoeren.
Hiervoor gelden o.a. de volgende rekenregels:

1) $(A\cap B) \cap C = A \cap (B\cap C)$

2) $(A\cup B) \cup C = A \cup (B\cup C)$

Dit zijn de z.g. <u>associatieve wetten</u>:
De uitkomst hangt hier niet af van de volgorde waarin men het proces uitvoert. Daarom laat men hier ook wel de haakjes weg, en schrijft

$A \cap B \cap C$ i.p.v $A \cap (B\cap C)$

en $A \cup B \cup C$ i.p.v $A \cup (B\cup C)$

3) $A \cap (B\cup C) = (A\cap B) \cup (A\cap C)$

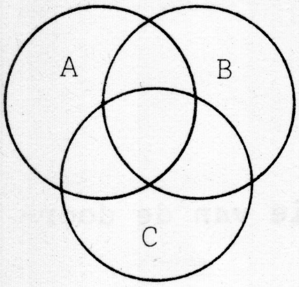
4) $A \cup (B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$

Dit zijn de z.g. <u>distributieve wetten</u>.

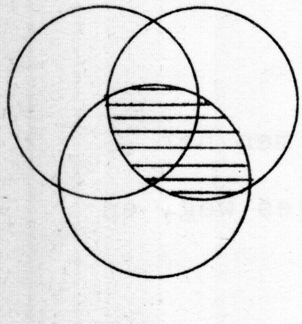
( 1.10) Deze regels kan men prachtig illustreren met plaatjes in het platte vlak. Als voorbeeld nemen we regel 4:

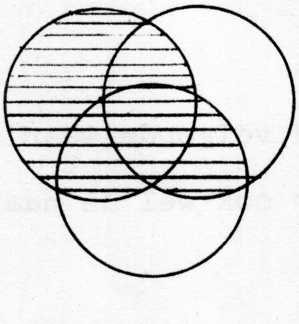
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

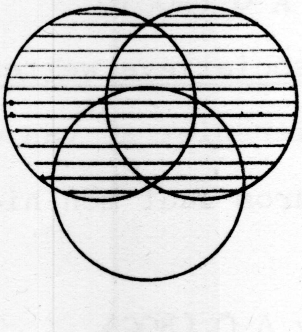
Laten A, B en C de verzamelingen zijn die begrensd worden door de respectievelijke cirkels

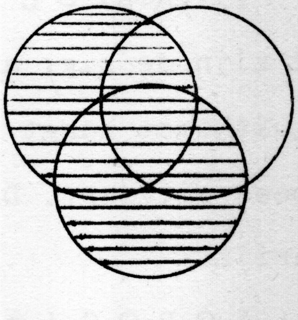


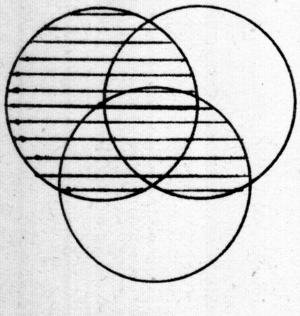

Voor de linkerkant van de vergelijking arceren we eerst $B \cap C$ (afb 1), daarna arceren we $A \cup (B \cap C)$ (afb 2). Voor de rechterkant arceren we eerst $A \cup B$ (afb 3) en $A \cup C$ (afb 4), daarna arceren we $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ (afb 5). Inderdaad zien we nu dat afb 2 gelijk is aan afb 5.


afb 1


afb 2


afb 3


afb 4


afb 5

Maak zelf dergelijke plaatjes voor de andere regels!

Uit de grondregels 1) t/m 4) kan men nog vele andere regels afleiden, zoals bijvoorbeeld de absorptiewetten

$A \cap (A \cup B) = A$ en $A \cup (A \cap B) = A$

Om u een idee te geven hoe men een stelling over verzamelingen bewijst, laten we hier het bewijs van regel 3) volgen.

Eerst tonen we aan

$A \cap (B \overset{\cup}{\cap} C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Zij $x \in A \cap (B \cup C)$. D.w.z. $x \in A$ én $x \in B \cup C$. Dan zijn er twee mogelijkheden: $x \in A$ én $x \in B$ of $x \in A$ én $x \in C$.

In het eerste geval is $x \in A \cap B$, dus zeker $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

In het tweede geval is $x \in A \cap C$, dus zeker $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

We hebben nu aangetoond:

Als $x \in A \cap (B \cup C)$ dan $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

maar deze uitspraak is precies de definitie van

$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Nu moeten we nog aantonen dat

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

Welnu: $A \cap B \subset A$ en $A \cap C \subset A$, dus $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A$ (1)

Bovendien:

$A \cap B \subset B \subset B \cup C$

en $A \cap C \subset C \subset B \cup C$

dus $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset (B \cup C)$ (2)

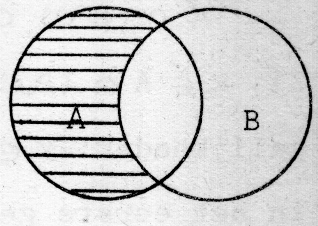
(1) en (2) samen geven nu het gewenste.

<u>Opgave</u>: Ga in bovenstaand bewijs bij iedere stap na, door welke wet in de voorafgaande theorie hij gerechtvaardigd is.

(1.11) Bij twee verzamelingen A en B noteren we $A \setminus B$ voor de verzameling "A met daaruit weggelaten wat in B zit". Dus

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Merk op dat de notatie $A \setminus B$ niet impliceert dat $B \subset A$ zou zijn!
We illustreren de notatie $A \setminus B$ met een plaatje in het platte vlak.
Laten A en B begrensd worden door de respectievelijke cirkels, dan wordt $A \setminus B$ gegeven door het gearceerde gebied.




Zoals men gemakkelijk nagaat gelden de volgende rekenregels:

$$(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$$

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B$$

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$$

Illustreer de regels zelf met plaatjes.

(1.12) Als B een deelverzameling van A is, dus $B \subset A$, dan heet $A \setminus B$ het <u>complement van B in A</u>.
Spreken we van tevoren af dat alle te beschouwen verzamelingen deelverzamelingen zullen zijn van een vaste verzameling U, dan noemen we $U \setminus A$ eenvoudig het complement van A.

(1.13) Een zeer gebruikelijke notatie voor het complement van A is $\complement A$. Dus

$$\complement A = U \setminus A$$

In dit geval gelden de volgende rekenregels (ga ze alle na!):

$\complement\phi = U \quad , \quad \complement U = \phi$

$A \cap \complement A = \phi, \ A \cup \complement A = U$

$\complement(\complement A) = A$

$A \subset B$ dan en slechts dan als $\complement B \subset \complement A$

Verder hebben we dan nog de reciprociteitswetten van De Morgan, die $\cap$ en $\cup$ verwisselen:

$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ en $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$.

Illustreer deze zelf met plaatjes!

## 2. LOGICA

In het vorige hoofdstuk zijn we herhaaldelijk uitdrukkingen tegen gekomen als:

"voor iedere x geldt"

"als...dan..."

"dan en slechts dan als"

"én", "of"

Aangezien deze en andere logische begrippen veelvoudig voorkomen in wiskundige formuleringen en bewijzen, heeft men ze vervangen door logische symbolen. De meest voorkomende uitdrukkingen met hun symbolen zijn:

(2.1) a) de quantoren

$\forall$ "voor iedere"

$\exists$ "er is"

b) de voegwoorden (connectieven)

$\neg$ "niet" (ontkenning)

$\vee$ "of" (niet uitsluitend)

$\wedge$ "én"

$\Rightarrow$ "als...dan..."

$\Leftrightarrow$ "dan en slechts dan als"

Er zijn ook nog andere symbolen met dezelfde betekenis in omloop, bijvoorbeeld

$\forall = \bigwedge$ , $\exists = \bigvee$ , $\neg p = \bar{p}$, $\wedge = \&$, $\Rightarrow = \rightarrow$, $\Leftrightarrow = \leftrightarrow$.

Voorbeelden.

1. Voor ieder reëel getal x geldt: als $|x| = 1$, dan is $x = 1$ of $x = -1$. In logische taal wordt dit

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (|x| = 1 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1)$$

2. De vergelijking $x^2 + x - 1 = 0$ heeft een reële wortel. In logische taal:

$$(\exists x \in \mathbb{R})\ (x^2 + x - 1 = 0).$$

3. De vergelijking $x^2 + x + 1 = 0$ heeft geen reële wortels. In logische taal:

$$\neg[(\exists x \in \mathbb{R})\ (x^2 + x + 1 = 0)]$$

of

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (x^2 + x + 1 \neq 0).$$

4. Laten A en B deelverzamelingen van U zijn. De definitie van $A = B$ is: Voor alle $x \in U$ geldt: $x \in A$ dan en slechts dan $x \in B$. In logische taal:

$$A = B \Leftrightarrow [(\forall x \in U)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)].$$

Evenzo vinden we voor $A \subset B$ de uitdrukking:

$$A \subset B \Leftrightarrow [(\forall x \in U)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)],$$

en voor $A \cap B \neq \phi$:

$$A \cap B \neq \phi \Leftrightarrow [(\exists x \in U)\ (x \in A \wedge x \in B)].$$

(2.2) Een uitspraak (propositie) p kan waar of onwaar zijn. Uit twee uitspraken p en q ontstaat een nieuwe uitspraak door p en q samen te voegen met een van bovenstaande voegwoorden. De waarheid van zo'n samenvoeging hangt af van de waarheid van de samenstel-

lende delen:

$\neg p$ is precies dan waar als p onwaar is.

$p \vee q$ is alleen onwaar als p en q <u>beide onwaar</u> zijn. Dus $p \vee q$ is waar zodra p of q of p en q waar zijn. Het teken $\vee$ betekent dus "of" in niet uitsluitende zin.

$p \wedge q$ is alleen waar als p en q beide waar zijn.

$p \Rightarrow q$ is alleen <u>onwaar</u> als p waar én q onwaar is. In alle andere gevallen is $p \Rightarrow q$ waar. In het bijzonder is $p \Rightarrow q$ waar als p onwaar is, en q willekeurig. Immers uitgaande van een onware veronderstelling kan ik alles concluderen.

$p \Leftrightarrow q$ is alleen waar als p en q <u>beide waar</u> of <u>beide onwaar</u> zijn.

Uit bovenstaande karakterisering van de voegwoorden zien we o.a.:

(2.3) $p \vee \neg p$ is altijd waar

$p \wedge \neg p$ is altijd onwaar

$p \Rightarrow q$ is hetzelfde als $(\neg p) \vee q$

$p \Leftrightarrow q$ is hetzelfde als $(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$

We laten nu een lijst van belangrijke, equivalente uitspraken volgen. Controleer zelf!

$\neg(p \vee q)$ is equivalent met $(\neg p) \wedge (\neg q)$

$\neg(p \wedge q)$ is equivalent met $(\neg p) \vee (\neg q)$

$\neg(p \Rightarrow q)$ is equivalent met $p \wedge (\neg q)$

$\neg(\neg p)$ is equivalent met p

$p \Leftrightarrow q$ is equivalent met $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$p \Rightarrow q$ is equivalent met $\neg q \Rightarrow \neg p$

Denk erom dat de uitspraken $p \Rightarrow q$ en $\neg p \Rightarrow \neg q$ niet equivalent zijn. Immers, zij p een ware uitspraak, bijvoorbeeld $3 \geqslant 2$, en q een onware uitspraak, bijvoorbeeld $3 \leqslant 2$. Dan is $p \Rightarrow q$ onwaar, maar $\neg p \Rightarrow \neg q$ is waar omdat $\neg p$ onwaar is.

(2.4) Alvorens verder te gaan, willen we het nog even hebben over het voegwoord $\Rightarrow$. "$p \Rightarrow q$ is waar" betekent niet meer of minder dan dat de situatie "p waar, q onwaar" zich niet voordoet. Als we dus voor zekere uitspraken p en q kunnen bewijzen dat uit de waarheid van p die van q volgt, dan hebben we aangetoond dat $p \Rightarrow q$ waar is. Weten we bovendien nog dat p waar is, dan is ook q waar. Dus uit de waarheid van p en $p \Rightarrow q$ volgt de waarheid voor q.

(2.5) Tot nu toe hebben we het alleen gehad over uitspraken die waar of onwaar zijn. Er zijn echter ook uitspraken waarvan de waarheid afhengt van een of meer variabelen die men in de uitspraak betrekt. In het eerste geval spreken we dan van een <u>propositie</u>, in het tweede geval van een <u>predicaat</u>. Wanneer men in een predicaat voor de variabelen bepaalde objecten substitueert, dan gaat dit predicaat over in een propositie, die waar of onwaar kan zijn.

<u>Voorbeeld</u>. Het predicaat "$x = 2$" gaat door substitutie van $x = 1$ over in de onware propositie $1 = 2$. Evenzo gaat het predicaat $x \in [0,1]$ voor $x = \frac{1}{2}$ over in de ware propositie $\frac{1}{2} \in [0,1]$.

(2.6) Een predicaat P(x) wordt ook een propositie als de variabele x wordt "gebonden" door vóór P(x) te schrijven $(\exists x \in U)$ of $(\forall x \in U)$, waarbij U een verzameling is. We krijgen dan:

$(\exists x \in U)P(x)$: Er is een $x \in U$ waarvoor $P(x)$ waar is.

$(\forall x \in U)P(x)$: Voor alle $x \in U$ is $P(x)$ waar.

<u>Voorbeelden</u>:

$(\exists x \in R)\ (x^2 + x = 0)$ is een ware propositie

$(\forall x \in R)\ (x^2 + x = 0)$ is een onware propositie.

(2.7) De negatieregels voor de quantoren $\forall$ en $\exists$ zijn:

$$\neg[(\forall x \in U)P(x)] \Leftrightarrow [(\exists x \in U)\ (\neg P(x))]$$

$$\neg[(\exists x \in U)P(x)] \Leftrightarrow [(\forall x \in U)\ (\neg P(x))]$$

<u>Voorbeeld</u>. Voor een deelverzameling A van U geldt

$$A = \phi \Leftrightarrow [(\forall x \in U) \neg (x \in A)]$$

ontkennen we dit, dan komt er:

$$A \neq \phi \Leftrightarrow \neg[(\forall x \in U)\neg(x \in A)] \Leftrightarrow [(\exists x \in U)\neg\neg(x \in A)] \Leftrightarrow [(\exists x \in U)\ (x \in A)]$$

(2.8) Opeenvolgende quantoren worden als volgt gelezen:

$(\forall x \in U)\ (\forall y \in V)$: Voor alle $x \in U$ en alle $y \in V$ geldt...

$(\exists x \in U)\ (\exists y \in V)$: Er is een $x \in U$ en een $y \in V$ zodat...

$(\exists x \in U)\ (\forall y \in V)$: Er is een $x \in U$ zodat voor alle $y \in V$ geldt...

$(\forall x \in U)\ (\exists y \in V)$: Bij iedere $x \in U$ is een $y \in V$ (die eventueel van x afhangt!) te vinden zodat...

<u>Voorbeelden</u>. Laat U = V = R, de reële getallen zijn. Voor het gemak schrijven we nu $\forall x$ en $\exists x$ in plaats van $\forall x \in R$ en $\exists x \in R$. Bekijk het predicaat $x > y$. Dan zien we:

1. $(\forall x)(\forall y)(x > y)$ is onwaar, want $x > y$ is onwaar voor x=0 en y=1
2. $(\exists x)(\forall y)(x > y)$ is onwaar, want bij iedere keuze van x kan ik voor y nemen $y = x + 1$.
3. $(\exists x)(\exists y)(x > y)$ is waar, want neem bijvoorbeeld x=1 en y=0.
4. $(\forall x)(\exists y)(x > y)$ is waar, want bij iedere x kan ik een y vinden

zodat $x > y$, bijvoorbeeld $y = x - 1$.

(2.9) Uit de voorbeelden 2 en 4 volgt dat men de volgorde van de quantoren $\exists$ en $\forall$ niet zomaar mag verwisselen.

(2.10) De relaties $=$, $\subset$ en de bewerkingen $\cap$, $\cup$ en $\complement$ voor verzamelingen A en B corresponderen met de verbinding door $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ en $\neg$ van de predicaten "$x \in A$" en "$x \in B$", zoals we in de volgende lijst laten zien:

$A = B$: $\quad x \in A \Leftrightarrow x \in B$

$A \subset B$: $\quad x \in A \Rightarrow x \in B$

$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

$\complement A = \{x | \neg(x \in A)\}$

Zo kan men bijvoorbeeld het bewijs van de wet $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ als volgt geformaliseerd geven:

$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$

(*) $\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Behalve de definities hebben we hier ook nog gebruik gemaakt van de propositie

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

die altijd waar is, onafhankelijk van de aard van de proposities p,q,r, zoals men gemakkelijk controleert.

Realiseren we ons vervolgens dat (*) waar is voor elke x, dan concluderen we uit (*):

$(\forall x)[x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)]$,

hetgeen volgens de definitie in de verzamelingenleer precies betekent dat $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(2.11) Nog enkele notatieconventies.

Dat er precies één $x \in U$ is met de eigenschap $P(x)$, zullen we aangeven door $(\exists! x \in U)P(x)$. Dit kan ook met de reeds bekende symbolen worden weergegeven, maar de formule wordt dan wel ingewikkeld:

$$[(\exists x)P(x)] \wedge (\forall x)(\forall y)[(Px) \wedge (P(y)) \Rightarrow (x = y)]$$

In deze formule hebben we a priori verondersteld dat x en y uit U komen, en vermelden dit dus niet meer bij de symbolen $\forall x$ en $\exists x$. In plaats van $(\exists x \in U)P(x)$ ziet men ook vaak de notatie $(\exists x)(x \in U \wedge P(x))$. Evenzo bij $\forall$.

Ter bekorting van het schrijfwerk wordt dikwijls de notatie $(\exists_{x,y \in U})$ in plaats van $(\exists x \in U)(\exists y \in U)$, en $(\forall_{x,y \in U})$ in plaats van $(\forall x \in U)(\forall y \in U)$ gebruikt.

## 3. AFBEELDINGEN *functie, transformatie, operator*

(3.1) Definitie. Een afbeelding van een verzameling A in een verzameling B is een voorschrift f, dat aan iedere $x \in A$ precies één $y \in B$ toevoegt. We noteren dit als

$$f: A \to B \text{ of } A \xrightarrow{f} B$$

Is y het beeld van x onder f, dan noteren we $y = f(x)$.

(3.2) Een afbeelding wordt bepaald door drie gegevens: A, B en het voorschrift f. We noemen

A het definitiegebied of domein van f.

B het waardegebied of codomein van f.

f(x) het beeld van x onder f.

x heet een origineel van y als $f(x) = y$

(3.3) Voorbeelden

1) R zij de verzameling der reële getallen. Bekijk dan de afbeelding "sinus":

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

In plaats van f schrijven we nu dus sin. Zoals iedereen wel bekend is, is voor ieder reëel getal $x \in \mathbb{R}$ inderdaad sin x eenduidig bepaald. Daarentegen kan een $y \in \mathbb{R}$ meerdere originelen hebben. Ook kan het hier gebeuren dat een $y \in \mathbb{R}$ geen originelen bezit.

2) We bekijken nogmaals de afbeelding sinus, maar nu met definitiegebied het segment $[0,\pi]$ en waardegebied $[0,1]$, dus

$$\sin : [0,\pi] \to [0,1].$$

We dienen deze afbeelding wegens de definitie te onderscheiden van de sinus-afbeelding in voorbeeld 1. Dit blijkt ook uit de hier geldende eigenschap dat er nu geen elementen in het waardegebied zitten die geen origineel hebben. Bovendien heeft elke $y \in [0,1]$ hier hoogstens twee originelen, en ook dat geldt niet in voorbeeld 1.

3) Zij A de verzameling van alle mogelijke driehoeken in het platte vlak, en zij B de verzameling van alle punten van dat vlak. We kunnen dan een afbeelding van A in B maken door bijvoorbeeld aan ieder driehoek zijn zwaartepunt toe te voegen.

4)Zij A de verzameling van de mensen in Utrecht die over een telefoon beschikken. We kunnen dan een afbeelding van A naar de verzameling van de gehele getallen maken, door aan iedereen die tot A behoort zijn telefoonnummer toe te voegen.

(3.4) Uit de definitie blijkt dat we twee afbeeldingen $f:A \to B$ en $f:C \to D$ met hetzelfde voorschrift f als verschillend moeten beschouwen indien $A \neq C$ of $B \neq D$ is. Is in zo'n geval $A \subset C$ en $B \subset D$, dan noemen we $f:A \to B$ een restrictie (beperking) van $f:C \to D$, ofwel $f:C \to D$ een extensie (uitbreiding) van $f:A \to B$. Is $B = D$ en $A \subset C$, dan noteren we voor $f:C \to B$ de restrictie $f:A \to B$ wel met $f|_A$ (de restrictie van f tot A).
Dus voor $f:C \to B$ en $A \subset C$ is $f|_A : A \to B$ gedefinieerd door $f|_A(x) = f(x)$ voor alle $x \in A$.

(3.5) Zij $f:A \to B$ een afbeelding. In voorbeeld 1 zagen we reeds dat er afbeeldingen zijn waarvoor niet elk element in het waarde gebied een origineel heeft. Als dit gebeurt, dan komt blijkbaar niet elke $y \in B$ voor als $f(x)$ met $x \in A$. We noteren

$$f(A) = \{y \in B \mid (\exists x \in A)\ f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}$$

en noemen $f(A)$ het beeld van A onder f.
Is $f(A) = B$, dan kan bovenbeschreven geval zich blijkbaar niet voordoen, en zeggen we: f is een afbeelding van A op B, of eenvoudig: f is een afbeelding op, of f is een surjectie, of f is surjectief.

Heeft iedere $y \in B$ ten hoogste één origineel, dus als $(\forall u \in A)(\forall v \in A)[\, f(u) = f(v) \Rightarrow u = v]$, dan zeggen we: f is ééneénduidig (verkort: 1-1), of f is een injectie, of f is injectief.

Voorbeelden. Bekijk de afbeelding f met $f(x) = x^2$ in de volgende gevallen:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2) $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$

3) $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$

4) $f : [0,1] \to [0,2]$

Ga zelf na dat in de achtereenvolgende gevallen geldt:

1) f is niet 1-1, niet op

2) f is niet 1-1, wel op

3) f is 1-1 en op

4) f is 1-1, maar niet op

Een afbeelding die <u>1-1 en op</u> is noemen we ook wel <u>bijectie</u>, of <u>bijectief</u>.

(3.6) In veel gevallen hebben we geen naam voor een afbeelding (zoals bijv. sin, tg, cos), maar is het voorschrift toch simpel van aard (bijv. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = e^x$). In plaats van dan steeds te moeten schrijven "de afbeelding f met $f(x) = \ldots$" gebruiken we de notatie $x \mapsto f(x)$.

Bijvoorbeeld $x \mapsto x^3 + x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betekent: de afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(x) = x^3 + x$.

(3.7) Laat de afbeelding $f : A \to B$ 1-1 en op zijn. Dan heeft ieder $y \in B$ precies één origineel $x \in A$ met $y = f(x)$. Volgens de definitie ontstaat zo een <u>afbeelding</u> $f^{-1} : B \to A$, $f^{-1}(y) = x$ zodat $f(x) = y$. $f^{-1} : B \to A$ heet de <u>inverse</u> van f.

<u>Voorbeeld</u>. Bekijk de afbeelding $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeven door $f(x)=x^3$. Het is duidelijk dat deze afbeelding 1-1 en op is. Zijn inverse wordt gegeven door $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Bedenk dus goed dat $f^{-1}(x)$ geheel iets anders is dan $(f(x))^{-1}$.

(3.8) Bij iedere verzameling A hebben we een zeer bepaalde afbeelding, $id_A : A \to A$ gegeven door $id_A(x) = x$ voor alle $x \in A$. We noemen hem de <u>identieke afbeelding van A</u>, en noteren deze afbeelding ook wel als $1_A$. Duidelijk is: $(id_A)^{-1} = id_A$.

(3.9) Gegeven twee afbeeldingen $f:A\to B$ en $g:B\to C$, dus zodat het waardegebied van f tevens het definitiegebied van g is. Dan kunnen we de <u>samengestelde afbeelding</u>

$$g\circ f: A \to C$$

bekijken, gedefinieerd door $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ voor alle $x \in A$.

<u>Voorbeelden</u>:

1) $A = B = C = \mathbb{R}, f = (x \mapsto x^2): \mathbb{R}\to\mathbb{R}, g = (x \mapsto x^3): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dan is $g\circ f = (x \mapsto x^6): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2) A is de verzameling van de punten op een vaste lijn l in het vlak. B is de verzameling van de halfrechten in dat vlak, die als eindpunt een vast punt M hebben, $M \notin l$. C is de verzameling van de punten op een cirkel met middelpunt M in datzelfde vlak.
$f : A \to B$ voegt aan ieder punt van l toe de halfrechte vanuit M door dat punt.
$g : B \to C$ voegt aan iedere halfrechte zijn snijpunt met de cirkel toe. Dan is $g\circ f : A \to C$ de projectie vanuit M van l op de cirkel. (Maak een tekening van de situatie)

3) Zij $f : A \to B$ 1-1 en op, met inverse $f^{-1} : B \to A$. Dan bestaan $f\circ f^{-1} : B \to B$ en $f^{-1}\circ f : A \to A$ en $f\circ f^{-1} = id_B$ en $f^{-1}\circ f = id_A$.

4) $f = (x \mapsto x^2) : \mathbb{R} \to [0,\infty)$

$g = (x \mapsto \sqrt{x}) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

dan is

$g\circ f = (x \mapsto |x|) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(3.10) We geven nu enkele belangrijke stellingen over de samenstelling van afbeeldingen en laten de essentiële onderdelen van de bewijzen hiervan zien.

STELLING I. Laten $f : A \to B$ en $g : B \to C$ beide 1-1 en op zijn.

Dan a) $g \circ f$ heeft een inverse

b) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$

Bewijs: ad a) We laten zien dat $g \circ f$ 1-1 en op is.

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$$

Verder:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} g(f(x)) = g(f(x')) \\ g \text{ 1-1} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = f(x') \\ \qquad\qquad\qquad\quad f \text{ 1-1} \end{array}\right\} \Rightarrow x = x'$$

Dus inderdaad, onder de gemaakte veronderstellingen geldt:

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow x = x'$. Dus $g \circ f$ is 1-1. Nu nog het op zijn.

$g$ is op: $(\forall z \in C)(\exists y \in B)[g(y) = z]$

$f$ is op: $(\forall y \in B)(\exists x \in A)[f(x) = y]$

Zij nu $z \in C$. Volgens de eerste uitspraak is er een $y \in B$ met $g(y) = z$. Maar bij dié $y$ is er dan volgens de tweede uitspraak een $x \in A$ zodat $f(x) = y$. Dus $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

ad b) $(g \circ f)^{-1} z = x \Leftrightarrow z = (g \circ f)x \Leftrightarrow z = g(f(x)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g^{-1}(z) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(g^{-1}(z)) = x \Leftrightarrow (f^{-1} \circ g^{-1})z = x$

Dus voor alle $z \in C$ is $(g \circ f)^{-1} z = (f^{-1} \circ g^{-1})z$. De voorschriften zijn dus hetzelfde en ook definitiegebied en waardegebied stemmen overeen.

STELLING II. Als $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, dan is

$(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) : A \to D$.

( de operatie "samenstellen" is associatief).

Bewijs: $((g \circ h) \circ f)(x) = (g \circ h)(fx) = g(h(fx)) = g((h \circ f)(x)) =$
$= (g \circ (h \circ f))(x)$. Maak het verder zelf af.

STELLING III. Zij $f : A \to B$ 1-1 en op. Dan a) $f^{-1}$ is 1-1 en op

b) $(f^{-1})^{-1} = f$

Bewijs: ad a) $f^{-1}(y) = f^{-1}(y') \Rightarrow f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y')) \Rightarrow y = y'$.
Dus $f^{-1}$ is 1-1. Verder hebben we nog voor $x \in A : x = f^{-1}(f(x))$, met $f(x) \in B$, dus $f^{-1}$ is op.

ad b) $(f^{-1})^{-1}(x) = y \overset{?}{\Leftrightarrow} x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$

Aangezien dit geldt voor iedere $x \in A$, vallen de voorschriften $(f^{-1})^{-1}$ en $f$ samen, terwijl bovendien de definitiegebieden en de waardegebieden samenvallen.

STELLING IV. $f : A \to B$, $g : B \to C$.

a) als $g \circ f$ op is, dan is $g$ op

b) als $g \circ f$ 1-1 is, dan is $f$ 1-1

Bewijs: ad a) Zij $z \in C$, dan is er dus een $x \in A$ met $(g \circ f)(x) = z$ en bijgevolg is $z = g(f(x))$ met $f(x) \in B$.

ad b) $f(x) = f(x') \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Leftrightarrow x = x'$.

Voorbeelden. In stelling IV hoeft bij a) niet te gelden dat $f$ op is en bij b) niet dat $g$ 1-1 is. Om dit te laten zien bekijken we de volgende situaties:

ad a) Neem $A = B = \mathbb{R}$, de verzameling van alle reële getallen en neem $C = \mathbb{R}^+$, de verzameling van de reële getallen die $\geq 0$ zijn. Zij verder $f : A \to B$ gegeven door $f(x) = x^2$ voor alle $x \in A$ en $g : B \to C$ door $g(y) = |y|$ voor alle $y \in B$. Ga nu zelf na dat $g \circ f$ en $g$ op zijn, maar dat $f$ niet op is.

ad b) Neem $A = \mathbb{R}^+$ en neem $B = C = \mathbb{R}$. Definieer $f : A \to B$ door

$f(x) = \sqrt{x}$ voor alle $x \in A$ en definieer $g : B \to C$ door $g(x) = x^2$ voor alle $x \in B$; Ga nu weer zelf na dat $g \circ f$ en $f$ 1-1 zijn, maar dat $g$ niet 1-1 is.

STELLING V. Zij $f : A \to B$ een afbeelding. Dan is

$$id_B \circ f = f \circ id_A = f$$

Bewijs deze stelling zelf.

STELLING VI. Als voor $f : A \to B$ en $g : B \to A$ geldt

$$g \circ f = id_A \text{ én } f \circ g = id_B, \text{ dan is } g = f^{-1}$$

Bewijs: $id_A$ is 1-1 en op, evenzo $id_B$. Volgens stelling IV zijn $f$ en $g$ dus beide 1-1 en op, en hebben dientengevolge inverses $f^{-1}$ en $g^{-1}$. Maar dan is

$g = id_A \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ id_B = f^{-1}$.

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van stelling II en stelling V.

(3.11) Zij $f : A \to B$ een afbeelding en zij $X$ een deelverzameling van $A$. Op voor de hand liggende manier definiëren we het beeld $fX$ van $X$ door

$$fX = \{f(x) | x \in X\}.$$

Dus $(\forall y)[y \in fX \Leftrightarrow (\exists x \in X)(y = f(x))]$ is een ware propositie.

Voor deelverzamelingen $X \subset A$ en $Y \subset A$ gelden de volgende regels:

1) $X \subset Y \Rightarrow fX \subset fY$

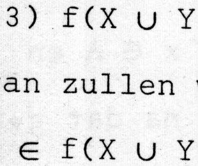
– 2) $f(X \cap Y) \subset fX \cap fY$

3) $f(X \cup Y) = fX \cup fY$

Hiervan zullen we alleen de laatste regel bewijzen:

Zij $z \in f(X \cup Y)$, dan is er dus een $x \in X \cup Y$ met $f(x) = z$. Er zijn dan twee mogelijkheden (of beide): $x \in X$ of $x \in Y$. In het

ad 2)



eerste geval is $z \in f(X)$, in het tweede is $z \in f(Y)$. In ieder geval is z dus een element van $f(X) \cup f(Y)$. We hebben nu dus laten zien:

$$f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$$

Nu moeten we nog de omgekeerde inclusie bewijzen. Zij $z \in f(X) \cup f(Y)$. Dan zijn er weer twee mogelijkheden (of beide): $z \in f(X)$ of $z \in f(Y)$. In het eerste geval is er een $x \in X$ met $f(x) = z$, in het tweede geval is er een $x \in Y$ met $f(x) = z$. In elk geval is er dus een $x \in X \cup Y$ met $f(x) = z$, dus $z \in f(X \cup Y)$.

Voorbeeld. Merk op dat in regel 2 het inclusieteken $\subset$ staat en niet het gelijkteken =. Dat het gelijkteken hier in het algemeen inderdaad niet past, zien we aan het volgende voorbeeld. Zij $f : \underline{3} \to \underline{3}$ gegeven door $f(1) = 1, f(2) = 2$ en $f(3) = 1$. Neem nu $X = \{1,2\}$ en $Y = \{2,3\}$. Dan is $fX = fY = \{1,2\}$, dus $fX \cap fY = \{1,2\}$. Maar $f(X \cap Y) = f\{2\} = \{2\}$.

(3.12) Zij **f** : $A \to B$ weer een afbeelding. Bij een deelverzameling U van B beschouwen we nu de deelverzameling van A, bestaande uit alle elementen waarvan het beeld in U zit. We noteren deze deelverzameling met $f^{-1}U$ en noemen hem het volledig origineel van U of ook wel het inverse beeld van U. Dus $\mathcal{P}(A) \longleftarrow \mathcal{P}(B)$ machtsverzameling

$$\overset{(\sim)}{f^{-1}}U = \{x \in A \mid f(x) \in U\}.$$

Merk op dat f hier geen inverse hoeft te hebben, alhoewel we de notatie $f^{-1}U$ gebruiken. Er kan echter geen verwarring ontstaan omdat $f^{-1}$ hier niet los van U voorkomt. Bovendien als f een inverse $f^{-1}$ heeft, dan is $(f^{-1})U$ (het beeld van U onder $f^{-1}$) gelijk aan $f^{-1}U$ (het volledig origineel van U onder f). Ga dit

Bij een bijectie: $\{f^{-1}(x)\} = \overset{(\sim)}{f^{-1}}(\{x\})$

zelf na!

Voor deelverzamelingen $U \subset B$ en $V \subset B$ gelden de volgende regels:

1) $U \subset V \Rightarrow f^{-1}U \subset f^{-1}V$

2) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}U \cap f^{-1}V$ vgl blz 22

3) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}U \cup f^{-1}V$

Voor deelverzamelingen $X \subset A$ en $U \subset B$ geldt bovendien nog:

4) $f(f^{-1}U) \subset U$

5) $f^{-1}(fX) \supset X$

We bewijzen 2) en laten zien dat in 4) en 5) in het algemeen geen gelijktekens staan.

Bewijs van 2): $x \in f^{-1}U \cap f^{-1}V \Leftrightarrow x \in f^{-1}U \wedge x \in f^{-1}V \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) \in U \wedge f(x) \in V \Leftrightarrow f(x) \in U \cap V \Leftrightarrow x \in f^{-1}(U \cap V)$

Voorbeeld bij 4) en 5): Zij $f : \underline{3} \to \underline{3}$ gegeven door $f(1) = f(2) = f(3) = 1$. Neem $X = \{1\}$ en $U = \underline{3}$. Dan is

$$f^{-1}(fX) = f^{-1}\{1\} = \underline{3}$$

en

$$f(f^{-1}U) = f(\underline{3}) = \{1\}.$$

(3.13) Tot slot nog enkele notatiegewoonten. Ter bekorting van het schrijfwerk ziet men vaak de notatie $fg$ in plaats van $f \circ g$ (samenstelling). Men moet dan erg op zijn qui vive zijn, want $fg$ wordt ook wel gebruikt voor de vermenigvuldiging van twee afbeeldingen: $(fg)(x) = f(x).g(x)$, als dit tenminste zin heeft. Uit de context moet dan blijken wat bedoeld wordt. In plaats van de term "afbeelding" worden ook wel de namen "operator", "transformatie" en "functie" gebruikt.

## 4. RELATIES

Zij gegeven een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wanneer we nu in het platte vlak twee coördinaatassen, een x-as en een y-as, kiezen, dan kunnen we in dit vlak de grafiek van f tekenen. Deze grafiek bestaat uit die punten (x,y) van het vlak waarvoor $y = f(x)$. Door de keuze van de twee coördinaatassen hebben we het platte vlak eigenlijk geidentificeerd met de verzameling bestaande uit de paren (x,y), $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. De grafiek van f is een deelverzameling hiervan.

(4.1) Definitie. Laten A en B verzamelingen zijn. Onder het cartesisch product van A met B verstaan we de verzameling

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A,\ b \in B\}$$

Opmerkingen.

(1) In bovenstaand voorbeeld hebben we het platte vlak eigenlijk opgevat als $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(2) Houdt goed in de gaten dat A en B geen deelverzamelingen van $A \times B$ zijn. Wel zijn er 1-1 afbeeldingen van A en B in $A \times B$, als A en B niet leeg zijn. Beschouw bijvoorbeeld bij vast gekozen $b_0 \in B$ de afbeelding $g : A \to A \times B$ gegeven doot $g(a) = (a,b_0)$.

(4.2) Zij nu $f : A \to B$ een afbeelding. Onder de grafiek van f verstaan we dan de deelverzameling van $A \times B$ gegeven door

$$\text{Graf}(f) = \{(x,f(x)) \mid x \in A\}$$

(4.3) Een speciaal geval doet zich voor als A = B en f de identieke afbeelding is. De grafiek hiervan duiden we ook wel aan met $\Delta_A$. Dus

$$\Delta_A = \{(x,x) \mid x \in A\} \subset A \times A$$

$\Delta_A$ heet de <u>diagonaal</u> van $A \times A$

(4.4) <u>Definitie</u>. Laten A en B verzamelingen zijn. Een deelverzameling R van $A \times B$ heet een <u>relatie</u> tussen elementen van A en van B. We zeggen dat een paar $(a,b)$, $a \in A$, $b \in B$ <u>voldoet aan de relatie</u> R als $(a,b) \in R$.

<u>Voorbeelden</u>.

1) De grafiek van een afbeelding $A \to B$.

2) $A = B = \mathbb{R}$. Bekijk de relatie "groter dan": $x > y$. Hieraan voldoen onder andere de paren $(1,0)$, $(3,-1)$, $(5,4)$, maar $(4,5)$ voldoet niet. Teken zelf deze relatie in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3) $A = B = \mathbb{N}$, waarbij we met $\mathbb{N}$ de verzameling $\{1,2,3...\}$ van alle natuurlijke getallen aanduiden. Bekijk de relatie "x is deler van y" (notatie $x|y$). Hieraan voldoen o.a. de paren $(1,2)$,$(3,6)$, maar $(4,6)$ voldoen niet.

4) Zij A een willekeurige verzameling en zij $B = PA$, bestaande uit alle deelverzamelingen van A. Bekijk hier de relatie "$x \in C$" voor $x \in A$, $C \subset A$. Schrijf alle paren op die aan deze relatie voldoen als $A = \underline{3} = \{1,2,3\}$.

(4.5) Uit de definitie van een relatie blijkt dat de grafiek van een afbeelding een relatie is. Bovendien is het duidelijk dat een afbeelding geheel bepaald is door zijn grafiek.
Het is echter bepaald niet zo dat iedere relatie op te vatten is als de grafiek van een afbeelding; zie de voorbeelden 2), 3) en 4) hierboven. Uit de definities blijkt zonder meer:

Stelling: Een relatie $R \subset A \times B$ is de grafiek van een afbeelding $A \to B$ dan en slechts dan als aan de volgende voorwaarden voldaan is:

(i) Bij iedere $x \in A$ is een $y \in B$ zodat $(x,y) \in R$

(ii) Als voor $x \in A$, $y, y' \in B$ geldt $(x,y) \in R$ én $(x,y') \in R$ dan is $y = y'$. $\forall x \exists! y \, (x \in A, y \in B \mid (x,y) \in R)$

Notatie. In plaats van $(x,y) \in R$ schrijft men ook vaak $x \, R \, y$. Bovendien vinden we dikwijls de notatie $x \sim y$ voor $(x,y) \in R$

(4.6) Definitie. Zij A een verzameling en zij de relatie $R \subset A \times A$ genoteerd door: $x \sim y$ dan en slechts dan als $(x,y) \in R$. De relatie R heet een equivalentierelatie in A, als voor alle $a,b,c \in A$ voldaan is aan de eisen:

(i) $a \sim a$

(ii) als $a \sim b$, dan ook $b \sim a$

(iii) als $a \sim b$ én $b \sim c$, dan $a \sim c$.

(i), (ii) en (iii) heten respectievelijk de reflexieve, symmetrische en transitieve eigenschappen van R.

Voorbeelden.

1. $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $(n,m) \sim (p,q) \Leftrightarrow n + q = m + p$
2. $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $(n,m) \sim (p,q) \Leftrightarrow n.q = m.p$
3. Zij $f : A \to B$ een afbeelding; laat nu $R \subset A \times A$ gegeven worden door $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
4. $A = \mathbb{Z}$, de verzameling van de gehele getallen en $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ is een 3-voud.
5. $A = \mathbb{N}$ en $x \sim y \Leftrightarrow x + y = 6$ s
6. $A = \mathbb{R}$ en $x \sim y \Leftrightarrow x \geqslant y$ zt

R heet transitief $\Leftarrow \left[ ((aRb) \wedge (bRc)) \Rightarrow aRc \right]$ R heet reflexief $\Leftarrow R \supset \Delta_A$

$aRb \Leftrightarrow (a,b) \in R$

R heet symmetries $\Leftrightarrow \left[ \forall_{(a,b) \in A \times A} \big( (a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R \big) \right]$ (om $\overset{\Delta_A}{\Longleftrightarrow}$)

7. $A = PB$, de machtsverzameling van een verzameling B en $U \sim V \Leftrightarrow U \subset V$ $(U,V \in PB)$. zt

Ga zelf na dat we in de voorbeelden 1 t/m 4 te maken hebben met equivalentierelaties, maar dat 5, 6, 7 geen equivalentierelaties zijn.

(4.7) Bij een equivalentierelatie R in een verzameling A kunnen bij iedere $x \in A$ de deelverzameling $R_x \subset A$ van de met x equivalente elementen bekijken. D.w.z.

$$R_x = \{y \in A \mid (x,y) \in R\}.$$

$R_x$ heet de <u>equivalentieklasse van x</u>.

Gebruik makend van de definitie van equivalentierelatie bewijzen we de volgende resultaten:

1) $x \in R_x$ voor alle $x \in A$

2) $R_x = R_y \Leftrightarrow (x,y) \in R$

3) Als $R_x \neq R_y$, dan is $R_x \cap R_y = \phi$.

<u>Bewijs</u>. 1) volgt onmiddellijk uit de definitie.

2) Zij $R_x = R_y$. Dan is $y \in R_x$, dus $(x,y) \in R$. Zij andersom $(x,y) \in R$, en zij $z \in R_x$, dan is $(x,z) \in R$, dus ook $(z,x) \in R$. Omdat (x,y ∈ R volgt hieruit $(z,y) \in R$ en dus $(y,z) \in R$. Bijgevolg is $z \in R_y$. Op analoge manier toont men aan $z \in R_y \Rightarrow z \in R_x$.

3) We tonen aan: $R_x \cap R_y \neq \phi \Rightarrow R_x = R_y$. Zij dus $R_x \cap R_y \neq \phi$. Dan is er een $z \in A$ zodat $z \in R_x$ én $z \in R_y$. Uit 2) volgt dan $R_x = R_z$ en $R_y = R_z$, dus $R_x = R_y$.

Uit het bovenstaande volgt onmiddellijk de volgende stelling:

(4.8) Stelling. Zij R een equivalentierelatie in een verzameling A en zij $\mathcal{C}$ de collectie deelverzamelingen van A bestaande uit de door R bepaalde equivalentieklassen. Dan is $\mathcal{C}$ een partitie van A, d.w.z.

(1) $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$

(2) Voor alle $X, Y \in \mathcal{C}$ geldt: $X \neq Y \Rightarrow X \cap Y = \phi$

Omgekeerd bepaalt een partitie $\mathcal{C}$ van A een equivalentierelatie in A, blijkens de volgende stelling.

(4.9) Stelling. Zij $\mathcal{C}$ een collectie deelverzamelingen van A. Definieer de relatie R in A door $a \sim b$ dan en slechts dan als er een element $C \in \mathcal{C}$ is met $a \in C$ én $b \in C$.
Als $\mathcal{C}$ een partitie van A is (d.w.z. $\mathcal{C}$ voldoet aan de eisen (1) en (2) uit de vorige stelling) dan is R een equivalentierelatie in A.
Bewijs. We moeten aantonen dat aan de eisen van definitie (4.6) voldaan is. We tonen alleen aan $(a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$. Het verifiëren van $a \sim a$ en van $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ laten we aan de lezer over. Zij dus $a \sim b$ en $b \sim c$. Er zijn dus $X, Y \in \mathcal{C}$ met $a, b \in X$ en $b, c \in Y$. Dus $b \in X \cap Y$. Bijgevolg is $X \cap Y \neq \phi$. Volgens eis (2) voor een partitie (zie (4.8)) hebben we dus $X = Y$. Maar dan zijn a en c beide element van $X \in \mathcal{C}$, dus $a \sim c$.

## 5. NATUURLIJKE GETALLEN, VOLLEDIGE INDUCTIE EN AANTAL.

(5.1) De natuurlijke getallen $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$ waarmee we tellen, hebben een vaste volgorde. In deze volgorde heeft elk natuurlijk getal n precies één opvolger, nl. n+1. Bovendien is er bij elk natuurlijk getal, uitgezonderd 1, precies één natuurlijk getal waarvan het de opvolger is. We kunnen de natuurlijke getallen dus als volgt opgebouwd denken: bij 1 nemen we de opvolger 2, bij 2 de opvolger 3, bij 3 de opvolger 4, enz. Dit principe drukken we exact uit in het volgende axioma:

Axioma. (Peano)

Voor een deelverzameling $V \subset \mathbb{N}$ geldt $V = \mathbb{N}$, als voldaan is aan de volgende voorwaarden

(i) $1 \in V$

(ii) voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: $n \in V \Rightarrow n+1 \in V$.

(5.2) Op dit axioma berust het principe van "bewijzen door volledige inductie": Laat P(n) een uitspraak zijn waarin een natuurlijk getal n voorkomt. Als P(1) juist is en als uit de aanname dat P(n) juist is volgt dat dan ook P(n+1) juist moet zijn ($\forall n \in \mathbb{N}$), dan is P(n) juist voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Immers, beschouw de verzameling $V = \{n \in \mathbb{N} | P(n)\}$. Dan is $1 \in V$ en $n \in V \Rightarrow (n+1) \in V$, want P(1) was juist en uit de juistheid van P(n) volgde die van P(n+1). Maar dit zijn precies de voorden in het Axioma van Peano. Dan $V = \mathbb{N}$ m.a.w. P(n) is juist voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(5.3) In o.a. het college Infinitesimaalrekening vindt men een overvloed aan voorbeelden van deze bewijsmethode. Hier zullen we met deze methode het volgende, zeer belangrijke resultaat bewijzen:

Stelling. Een niet-lege verzameling natuurlijke getallen bezit een kleinste element, d.w.z. als $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \phi$, dan is er een $m \in A$ zodat $m \leqslant n$ voor alle $n \in A$.

Bewijs. Bekijk $B = \{y \in \mathbb{N} | y \leqslant x$ voor alle $x \in A\}$. Het is voldoende aan te tonen dat $B \cap A \neq \phi$ (waarom?). Dit zullen we doen door een bewijs uit het ongerijmde: uit $B \cap A = \phi$ volgt $A = \phi$, in tegenspraak met de veronderstelling. Zij dus $B \cap A = \phi$. Zeker is $1 \in B$. Stel nu $n \in B$, dan is $n \leqslant x$ voor alle $x \in A$, maar $n \neq x$ want $B \cap A = \phi$. Dus $n < x$ en bijgevolg $n+1 \leqslant x$, hetgeen oplevert: $n+1 \in B$. Volgens het axioma van Peano is dus $B = \mathbb{N}$, maar $B \cap A = \phi$, dus $A = \phi$.

(5.4) Uit deze stelling kunnen we nog een ander inductie principe afleiden:

Tweede inductieprincipe. Voor een deelverzameling $V \subset \mathbb{N}$ geldt $V = \mathbb{N}$ als voldaan is aan de volgende voorwaarden

(i) $1 \in V$

(ii) Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt: uit de aanname $m \in V$ voor alle $m \leqslant n$ volgt $n+1 \in V$.

Bewijs: Zij $V \subset \mathbb{N}$ een deelverzameling die aan (i) en (ii) voldoet. Bekijk dan $\mathbb{N} \backslash V = W$. Stel $W \neq \phi$. Dan heeft $W$ dus een kleinste element $n_0$. Maar dit betekent: $m \in V$ voor alle $m \leqslant n_0 - 1$. Dus volgens (ii): $n_0 \in V$. Dit kan echter niet wegens $V \cap W = \phi$. De veronderstelling $W \neq \phi$ is dus fout. Gevolg: $W = \phi$ en $V = \mathbb{N}$.

(5.5) Het aantal elementen van een verzameling A tellen we door ze op een rij te zetten en ze zo te voorzien van nummers 1,2,3,.... Het laatste nummer dat we dan nodig hebben is aantal elementen $|A|$ (of ook wel "#A") van A. In feite zoeken we dus een (1-1)-afbeelding van A <u>op</u> een beginstuk $\underline{n} = \{1,2,...,n\}$. van de natuurlijke getallen. Duidelijk is dat dit alleen maar goed gaat als $|A|$ <u>eindig</u> is. We stellen: $|\phi| = 0$
Een paar elementaire rekenregels voor het aantal elementen van <u>eindige</u> verzamelingen zijn:

1) $|A| = |B| \Leftrightarrow$ er is een (1-1)-afbeelding van A <u>op</u> B.
2) $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$
3) $|A \times B| = |A| . |B|$
4) $X \subset A \Rightarrow |X| \leqslant |A|$
5) als $X \subset A$ én $|X| = |A|$, dan $X = A$

(5.6) Bij oneindige verzamelingen ligt dit een beetje moeilijker. Soms kunnen we de elementen van een verzameling nog wel op een rij zetten, maar wordt die rij oneindig lang. In zo'n geval zeggen we: de verzameling is <u>aftelbaar oneindig</u>. Is ook dit niet mogelijk dan heet de verzameling <u>overaftelbaar</u>.

(5.7) Wanneer tussen twee verzamelingen A en B een (1-1)-afbeelding <u>op</u> bestaat, dan zeggen we: A en B hebben dezelfde <u>machtigheid</u> (ze zijn even groot).
Een aftelbaar oneindige verzameling heeft dus de machtigheid van de natuurlijke getallen.

Enkele voorbeelden.

(1) De rationale getallen $\left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p,q \text{ geheel}, q\neq 0\right\}$ zijn aftelbaar oneindig. Zet ze nl. als volgt op een rij: neem eerst alle $\frac{p}{q}$ met $\max(|p|,|q|) = 1$, dan die met $\max(|p|,|q|) = 2$, enz. Telkens komen er slechts eindig veel elementen bij, dus de zaak kan in een rij gezet worden. Ook is het duidelijk dat ieder rationaal getal eens aan de beurt komt.

Wel moeten we er natuurlijk om denken dat we niet dubbel tellen, bijv. $\frac{6}{9}$ kwam al eerder voor als $\frac{2}{3}$.

Wanneer we de rationale getallen $\frac{p}{q}$ opschrijven in een coördinatensysteem, bijvoorbeeld de teller langs de x-as en de noemer langs de y-as, dan komt bovenstaande procedure neer op het "aftellen volgens vierkanten":

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | $-\frac{3}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{0}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{3}$ | . |
| . | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{2}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{0}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | . |
| . | $-\frac{3}{1}$ | $-\frac{2}{1}$ | $-\frac{1}{1}$ | $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{3}{1}$ | . |
| . | $-\frac{3}{-1}$ | $-\frac{2}{-1}$ | $-\frac{1}{-1}$ | $\frac{0}{-1}$ | $\frac{1}{-1}$ | $\frac{2}{-1}$ | $\frac{3}{-1}$ | . |
| . | $-\frac{3}{-2}$ | $-\frac{2}{-2}$ | $-\frac{1}{-2}$ | $\frac{0}{-2}$ | $\frac{1}{-2}$ | $\frac{2}{-2}$ | $\frac{3}{-2}$ | . |
| . | $-\frac{3}{-3}$ | $-\frac{2}{-3}$ | $-\frac{1}{-3}$ | $\frac{0}{-3}$ | $\frac{1}{-3}$ | $\frac{2}{-3}$ | $\frac{3}{-3}$ | . |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . |

(2) Iedere twee segmenten hebben dezelfde machtigheid (zijn <u>gelijkmachtig</u>), want door een gelijkvormigheidstransformatie kan men ze 1-1 op elkaar afbeelden.

Laten de segmenten nl. gegeven worden door $[a,b]$ en $[c,d]$. Bekijk dan de afbeelding $f : [a,b] \to [c,d]$ gedefiniëerd door

$f(x) = c + \frac{x-a}{b-a}(d-c)$ voor alle $x \in [a,b]$.

(3) Een echt deel van een oneindige verzameling kan gelijkmachtig zijn met het geheel. Beschouw in $\mathbb{N}$ bijvoorbeeld de deelverzameling van de even getallen $\mathbb{N}_{even}$.
De afbeelding $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{even}$, gegeven door $f(n) = 2n$, is 1-1 en <u>op</u>.

## 6. AANHANGSEL.

### Het griekse alfabet.

In de wiskunde heeft men behoefte aan veel letters. Vaak komt een wiskundige niet toe met ons eigen alfabet en gebruikt hij ook nog het griekse alfabet:

| Hoofdletter | Kleine letter | Naam |
|---|---|---|
| Α | α | alpha |
| Β | β | bêta |
| Γ | γ | gamma |
| Δ | δ | delta |
| Ε | ε | epsilon |
| Ζ | ζ | zèta |
| Η | η | èta |
| Θ | θ , ϑ | thèta |
| Ι | ι | iota |
| Κ | κ | kappa |
| Λ | λ | lambda |
| Μ | μ | mu |
| Ν | ν | nu |
| Ξ | ξ | xi |
| Ο | ο | omikron |
| Π | π | pi |
| Ρ | ρ | rho |
| Σ | σ | sigma |
| Τ | τ | tau |
| Υ | υ | upsilon |
| Φ | ϕ , φ | phi |
| Χ | χ | chi |
| Ψ | ψ | psi |
| Ω | ω | omega |

<u>Opgaven bij Algemene Inleiding Wiskunde</u>.

1. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{1,2,5,6\}$. Bepaal $(A \cap B) \cup C$, $(B \cap C) \cup A$, $(C \cap A) \cup B$, $A \cap (B \cup C)$, $B \cap (C \cup A)$, $C \cap (A \cup B)$.

2. Bepaal alle deelverzamelingen van $\phi$, $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$.

3. Bewijs de tweede distributieve wet: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (uit de definities van "$\cap$" en "$\cup$").

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ is in het algemeen niet waar, Laat dit zien aan de hand van een tekening.

5. Bewijs: $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ en $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$

6. Leid met behulp van $A \setminus B = A \cap \complement B$ af

| | |
|---|---|
| $(A \cap B)\setminus C = A \cap (B \setminus C)$ | $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ |
| $(A \cup B)\setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ | $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. |

7. Welke van de volgende uitspraken zijn waar (x,y zijn reële getallen:

(i) $0 < 1 \vee 1 > 2$ (ii) $0 > 1 \wedge 1 > 2$

(iii) $0 < 1 \Rightarrow 1 < 2$ (iv) $0 > 1 \Rightarrow 1 > 2$

(v) $(\exists x)\ x^2 = 4$ (vi) $(\exists! x)\ x^2 = 4$

(vii) $(\forall x)(\exists y)\ x < y$ (viii) $(\exists x)(\forall y)\ x < y$

(ix) $(\forall x)(\forall y)[(x < 0 \wedge y < 0 \Rightarrow xy > 0]$.

8. Ontken de proposities in opg. 7. Zorg ervoor dat in de nieuwe proposities het teken $\neg$ niet voorkomt.

9. Welke regels voor verzamelingen beantwoorden aan de altijd ware formules:

$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

$(p \Rightarrow r) \Rightarrow [p \wedge (q \vee r) \not\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r]$.

10. Leid uit $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in B]$ af

$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)[x \in A \wedge x \notin B]$

11. Teken de relaties

(i) "x is deler van y" voor $x \in \{2,3,5,7,11\}$ en $y \in \underline{12}$

(ii) "$x^2 - y^2 = 0$" voor $x,y \in \mathbb{R}$ (= reële getallen)

(iii) "$|x^2 - y^2| < \frac{1}{2}$" voor $x,y \in \mathbb{R}$

12. Beschouw de relatie tussen reële getallen x,y gegeven door de vergelijking

(i) $x^2 - xy - 1 = 0$

Op welke verzamelingen bepaalt deze een functie $x \mapsto y$ resp. $y \mapsto x$? Welke waarden nemen deze functies aan? Zijn ze injectief? Ga hetzelfde na voor

(ii) $x^3 - x^2y - 1 = 0$

13. Neem een punt p in het vlak; A is de verzameling van alle punten van het vlak, B de verzameling van alle lijnen door p. Beschouw de relatie "x ligt op Y" voor $x \in A$ en $Y \in B$.

a) Toon aan dat deze relatie geen afbeelding $A \to B$ bepaalt.

b) Bepaal alle deelverzamelingen van A waarop de relatie wel een afbeelding definiëert.

c) Geef voorbeelden van zulke deelverzamelingen waarop de afbeelding $1^0$ surjectief maar niet injectief, $2^0$ injectief maar niet surjectief, $3^0$ geen van beide, $4^0$ bijectief is.

14. Bepaal voor $A = \underline{2}$ en $B = \underline{3}$ de 9 afbeeldingen $f : A \to B$ en de 8 afbeeldingen $g : B \to A$.
Voor welke paren geldt $g \circ f = 1_A$ en voor welke $f \circ g = 1_B$.

15. Bewijs voor $f : A \to B$ en $g : B \to C$
(i) f surjectief & g surjectief $\Rightarrow$ $g \circ f$ surjectief
(ii) f injectief & g injectief $\Rightarrow$ $g \circ f$ injectief
(iii) f bijectief & g bijectief $\Rightarrow$ $g \circ f$ bijectief

16. Voor $f : A \to B$ en $X, Y \subset A$ geldt $X \subset Y \Rightarrow fX \subset fY$.
Geef een voorbeeld waar $fX \subset fY$ maar $X \not\subset Y$.

17. Voor $f : A \to B$ en $X, Y \subset B$ geldt $X \subset Y \Rightarrow f^{-1}X \subset f^{-1}Y$
Geef een voorbeeld van $f^{-1}X \subset f^{-1}Y$ maar $X \not\subset Y$.
Bewijs: $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}X \cup f^{-1}Y$
$f^{-1} \complement X = \complement (f^{-1}X)$.

18. Welke van de eigenschappen reflexief, symmetrisch, transitief bezitten of ontberen de volgende relaties:
a) $|a-b| < 1$ voor $a,b \in \mathbb{R}$ (= reële getallen)
b) $a \leqslant b$ voor $a,b \in \mathbb{R}$
c) $a-b$ deelbaar door $p$ voor $a,b \in \mathbb{Z}$(= gehele getallen), $p$ vast geheel
d) $ad = bc$ voor $\ulcorner a,b \urcorner, \ulcorner c,d \urcorner \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

19. Bepaal alle relaties op $\underline{2}$ die reflexief of symmetrisch of transitief zijn. (Bekijk alle 16 deelverzamelingen van $\underline{2} \times \underline{2}$).

20. Bewijs de "deling met rest":
Zij $n \in \mathbb{N}$; bij iedere $m \in \mathbb{N}$ is er precies één $q \in \mathbb{N}$ waarvoor $m = nq + r$ met $0 \leqslant r < n$. (Beschouw $A = \{x \in \mathbb{N} \mid nx > m\}$).